Exercice 1 (7 points) (Géométrie dans l'epace)

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ et $C(6;-2;-1)$.

(I)

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne : $x+y+z-3=0$. Montrer que P est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit Q le plan perpendiculaire à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de Q.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , droite d'intersection des plans P et Q.

(II)

1. Soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$.Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
3. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.
4. a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

(II) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-9x-5y-z+2=0$$

1. Démontrer que S est une sphère de centre $\Omega\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$
2. Vérifier que la sphère S est circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
3. Montrer que l'intersection du plan (ABC) et S est un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 2 (6 points) (Géométrie dans l'epace)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,0,-1)$; $B(1,3,5)$ et $C(-7,2,2)$ et $H(-1,4,3)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$.
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est $x-2y-2z+15=0$.
   c) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC).
2. On considère l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4y-2z+1=0$$

   a) Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R.
   b) Vérifier que I est le milieu de segment $[AH]$.
   c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC).

3. Soit $J(0,0,1)$
   - a. Vérifier que J appartient à S.
   - b. Calculer la distance du point I à la droite (AJ).
   - c. En déduire que (AJ) est tangente à S.
   - d. Donner une représentation paramétrique de la droite (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et du plan (HBC).

Exercice 3

(6 points) *(Géométrie dans l'epace)*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,0,-2)$ et $C(-1,1,1)$.

1. a. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   - b. soit $\mathscr{P}$ le plan déterminé par les points A, B et C.
     Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $x+z=0$.
2. Soit Δ la droite de système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = & \alpha+1 \\ y = & 2 \\ z = & \alpha-1 \end{cases}$ $;\alpha \in \mathbb{R}$.
   - a. Vérifier que A est un point de Δ.
   - b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
3. Soit α un réel et $I_\alpha(\alpha+1, 2, \alpha-1)$ un point de la droite Δ.
   - a. Montrer que $d(I_\alpha, \mathscr{P}) = \sqrt{2}\,|\alpha|$.
   - b. Soit (S_α) la sphère de centre I_α et de rayon $2\sqrt{2}$.
     Déterminer suivant les valeurs de α la position relative de (S_α) et du plan $\mathscr{P}$.
4. a. Pour quelles valeurs de α, le point B appartient à (S_α).
   - b. Pour les valeurs de α trouvées dans la question 4.(a), caractériser $S_\alpha \cap \mathscr{P}$.

Exercice 4

(5 points) *(Géométrie dans l'epace)*

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points $A(3,1,0), B(1,2,0), C(3,2,1)$ et $D(0,0,m)$ où m est un réel positif.

1. a. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   - b. En déduire l'aire du triangle ABC.
   - c. Déterminer une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$. Prouver que $D \notin P$.
2. Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V = \dfrac{2m+5}{6}$
3. Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.
   Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}_+$ de , S_m est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
4. a. Montrer que S_m est tangente à P si et seulement si $m=2$.
   - b. Montrer dans ce cas que la droite (DB) est perpendiculaire au plan P.
   - c. En déduire le point de contact de S_2 et P.