EXERCICE N°1 3points

Compléter le tableau suivant qui donne, modulo7 ,
les produits des entiers de 0 à 6
(exemple: $5\times2=10=7+3$ donc $5\times2\equiv3[7]$)

a. Y a-t-il des couples (a, b) non nuls tels que $a\times b\equiv0[7]$.

b. Y a-t-il des couples (a, b) non nuls tels que $a\times b\equiv1[7]$.

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

EXERCICE N°2 3 points

1) a. Pour tout entier n, les n(n+1) et n(n-1) sont pairs.
b. Le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
c. En déduire que le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 6.
d. Pour tout entier n, le produit des k entiers consécutifs n(n+1)(n+2)...(n+k-1) est un multiple de k et k!.

2) a. Montrer que si (x n'est pas divisible par 3) alors $(x^3\equiv1 \pmod 9$ ou $x^3\equiv-1 \pmod 9)$).

b. Soient a, b et c trois entiers. Montrer que si ($a^3+b^3+c^3\equiv0\ (\text{mod } 9)$) alors (au moins l'un entiers a, b ou est divisible par 3). (on pourra utiliser **un raisonnement par La contraposée**).

EXERCICE N°3 3 points

1) a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier n, le reste de la division de n^2 par 7.
b. En déduire alors les solutions de l'équation $x^2\equiv2[7]$.

2) Soit $x\in\mathbb{N}$, déterminer les différents restes possibles de la division euclidienne de x^4 modulo 5.
On pourra présenter ces résultats dans un tableau:

x mod 5	0	1	2	3	4
x^2 mod 5					
x^4 mod 5					

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 3x + 4\equiv 0\ [7]$.

4) Montrer que l'équation (E): $8x^2\equiv16[3]$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

5) **a.** Discuter suivant les valeurs de n, , les restes de la division de 2^n et 3^n par 7.
b. Résoudre dans $\mathbb{N}$ chacune des équations : $2^x+3^x\equiv0[\text{mod }7]$ puis $2^x-3^x\equiv0[\text{mod }7]$.

6) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $5^x-3^x+6\equiv0[\text{mod }11]$.

7) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système: $\begin{cases} x\equiv3[\text{mod }5] \\ x\equiv1[\text{mod }6]\end{cases}$.

: 23390248 - 29862267

EXERCICE N°4 — 3 points

1) On considère l'équation (F) : $11x^2-7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple (x ; y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					
Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple (x ; y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

2) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple (x ; y) n'est pas solution de (F).
Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

EXERCICE 5 — 3 points

1) Discuter suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 7^n par10.

2) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}$ est divisible par 10.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}7^k$.

a. Montrer que $S_{n+4}\equiv S_n[\text{mod}10]$.

b. En déduire, selon les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de S_n par 10.

EXERCICE 6 — 3 points

On pose a= $7^{2017}+7^{2018}+7^{2019}$.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$, Discuter suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 7^n par100.

2) Montrer alors que $a+1\equiv 0[\text{mod}100]$ puis déduire les deux derniers chiffres de a.

3)a. Montrer que $a^{100}\equiv 1\left[\text{mod}100^2\right]$.

b. En déduire les quatre derniers chiffres de a^{100}.

EXERCICE 7 — 3 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=17$ et $u_{n+1}=1+(u_n-1)^2\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

1)a. Montrer que $u_n\in\mathbb{N}^*(\forall n\in\mathbb{N})$.

b. Montrer que $u_n\equiv 7[\text{mod}10](\forall n\in\mathbb{N})$.

2)a. Montrer que $u_n=2^{2^{n+2}}+1(\forall n\in\mathbb{N})$.

b. En déduire que $u_{n+4}=1+(u_n-1)^{16}\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

3)a. Montrer que $36^{16}\equiv 36[\text{mod}100]$.

b. En déduire que $u_{4n+2}\equiv 37[\text{mod}100]\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

EXERCICE 8 — 3 points

1) Soit n un entier naturel.

a. Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1[\text{mod} 8]$.

b. Montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0[\text{mod} 8]$ ou $n^2 \equiv 4[\text{mod} 8]$.

2) Soient a, b et c trois entiers naturel impairs.

a. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait.

b. Montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6[\text{mod} 8]$. (noter que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$).

c. En déduire que $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait.

d. Montrer que $(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait.

EXERCICE 9 — 3 points

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $3^x = 8 + y^2$.

1) a. Discuter, selon les valeurs de x, les restes de la division euclidienne de 3^x par 8.

b. Discuter, selon les valeurs de y, les restes de la division euclidienne de y^2 par 8.

2) Montrer que si x est impair l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

3) a. On pose x = 2n ($n \in \mathbb{N}$); prouver que $3^n \leq 8$.

b. En déduire les solutions de (E).

: 23390248 - 29862267